UNIVERSITY QUESTIONS

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয়-১৯৯৫

অন্তরকলন

১। (ক) কোন বিন্দুতে একটি ফাংশনের বামপক্ষ সীমা, ডান পক্ষ সীমা এবং ফাংশনটির সীমার ব্যাখ্যা দাও।

$f(x)$ ফাংশনটি নিম্নরূপে বর্ণিত হইল ঃ –

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{যখন } x > 0 \\ 0, & \text{যখন } x = 0 \\ -x, & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

মান নির্ণয় কর ঃ

$\lim_{x\to 0-} f(x)$, $\lim_{x\to 0+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 0} f(x)$ (যদি আদও বিরাজ করে)।

(খ) দেখাও যে,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

ফাংশনটি $x=0$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর।

(গ) মান নির্ণয় কর ঃ –

$$\lim_{x\to\infty} x(2^{1/x}-1).$$

২। (ক) নিম্নের যে-কোন দুইটির $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর ঃ–

(i) $y = x + x^x$;

(ii) $\sin y = x\sin(x+y)$;

(iii) $\tan y = \dfrac{2t}{1-t^2}$; $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

(খ) $y=x^3\sin x^2 x$-এর n-তম অন্তরজ বাহির কর।

(গ) রোল-এর উপপাদ্যটির বর্ণনা দাও। ম্যাকলরিন শ্রেণীর সাহায্যে $\log(1+x)$ কে x-এর ঊর্দ্ধ ক্রমানুসারে বিস্তার কর।

৩। (ক) সমমাত্রিক ফাংশন-এর সংজ্ঞা দাও।

দেখাও যে,

$$x\frac{\delta u}{\delta x} + y\frac{\delta u}{\delta y} + z\frac{\delta u}{\delta z} = 0.$$

যখন $u = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}$

(খ) যেখানে $y=\frac{a}{4}$ সেই বিন্দুতে $y(x^2+a^2)=ax^2$ রেখাটির স্পর্শক সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) xy এর গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর যখন $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

৪। (ক) দেখাও যে, কেন্দ্রের সাপেক্ষে উপবৃত্তের $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর পাদ সমীকরণ

$$\frac{a^2b^2}{p^2}=a^2+b^2-r^2.$$

(খ) বক্রতা জ্যা-এর সংজ্ঞা দাও। $s=c\log\sec\psi$- এর (s,ψ) বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসা বাহির কর।

(গ) অসীমতট নির্ণয় করঃ–

$$y^2(x^2-y^2)-2ay^3+2a^3x=0$$

যোগজকলন

৫। যোগজীকরণ নিষ্পন্ন কর (যে-কোন তিনটি) ঃ –

(i) $\int\frac{x+\sin}{1+\cos x}dx$; (ii) $\int\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$;

(iii) $\int\frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)}dx$; (iv) $\int\frac{dx}{\sqrt{4+3x-2x^2}}$

৬। মান নির্ণয় কর (যে-কোন তিনটি ঃ–

(i) $\int_0^1\frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$; (ii) $\int_0^\pi\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$;

(iii) $\int_0^\pi\frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}$, $0<a<1$;

(iv) $\int_0^\pi\frac{dx}{3+2\cos x}$.

৭। (ক) $\int_0^\pi f(x)\,dx$ কে সমষ্টির লিমিট হিসাবে সংজ্ঞায়িত কর এবং ইহা হইতে

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{1/3}\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)^{1/n}$$

এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $S_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$. ($n$ পূর্ণ সংখ্যা) হইলে দেখাও যে, $S_{n+1}=S_n=\frac{\pi}{2}$

৮। (ক) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$রেখা দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) $r=a(1+\cos\theta)$ বক্র-রেখাটি আদি রেখার চতুর্দিকে আবর্তনের ফলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহার আয়তন নির্ণয় কর।

অন্তরক সমীকরণ

৯। (ক) যে-কোন দুইটির সমাধান কর ঃ–

(i) $(x^3y^2-y)\,dx-(x^2y^3+x)dy=0$;

(ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$;

(iii) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\log y=\frac{y}{x^2}(\log y)^2$.

(খ) দেখাও যে, $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$ যথাযথ নয়। সমীকরণটির জন্য একটি যোগজীকারক নির্ণয় কর ঃ–

$$(D^3-D^2+4D-4)y=e^x\sin 2x.$$

(খ) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3dy}{dx}+2y=e^{3x}$ সমাধান বাহির কর, যেখানে $y=0$, যখন $x=0$ এবং $x=\log_e 2$.

(গ) নিম্নের রেখাগুলির সমকোণছেদী রেখাগোত্রের সমীকরণ বাহির করঃ–

$$y^2=4a(x+a).$$

English version

Differential Calculus

1. (a) Explain what are meant by left hand limit, right hand limit and limit of a function at a point.

A function $f(x)$ is defined as follows :—

$$f(x)=\begin{cases}x\,, & \text{when } x>0\\ 0\,, & \text{when } x=0\\ -x\,, & \text{when } x<0\end{cases}$$

Evaluate :

$\lim_{x\to0-}f(x)$, $\lim_{x\to0+}f(x)$ and $\lim_{x\to0}f(x)$ (whichever exists).

(b) Show that the function

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}\,, & \text{when } x\neq0\\ 0\,, & \text{when } x=0\end{cases}$$

is discontinuous at $x=0$

Draw the graph of the function.

(c) Evaluate :

$$\lim_{x\to\infty} x\,(2^{1/x}-1).$$

2. (a) Find the $\frac{dy}{dx}$ of any two of the following :—

(i) $y=x+x^x$; (ii) $\sin y = (x+y)$; (iii) $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

(b) Obtain the n–th derivative of $y = x^3\sin 2x$.

(c) State Rolle's Theorem. Expand $\log_e(1+x)$ is powers of x by Maclaurin's Theorem.

3. (a) Define homogeneous function.

Show that

$$x\frac{\delta u}{\delta x} + y\frac{\delta u}{\delta x} + z\frac{\delta u}{\delta x} = 0, \text{ when } u = \frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}.$$

(b) Find the equations of the tangents to the curve $y(x^2+a^2) = ax^2$at the points where $y = \frac{a}{4}$.

(c) Find the maximum value of xy when $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

4. (a) Show that the pedal equation of the curve $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ with regard to the centre is $\frac{a^2b^2}{p^2} = a^2+b^2-r^2$.

(b) Define : Chord of curvature. Find the radius of curvature at the point (s,ψ) on the curves $s=c\log\sec\psi$.

(c) Find the asymptotes of the cure $y^2(x^2-y^2)-2ay^3+2a^3x=0$

Integral Calculus.

5. Perform any three of the following integrations:—

(i) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx$;

(ii) $\int \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$;

(iii) $\int \frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)}\,dx$;

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x-2x^2}}$

6. Evaluate (any three):—

(i) $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$;

(ii) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}$, $0<a<1$;

(iv) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

7. (a) $\int_a^b f(x)\,dx$ as the limit of a sum and evaluate

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{1/3}\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)^{1/n}$$

এর মান নির্ণয় কর।

(b) If $S_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx$, ($n$ being an integer) then show that $S_{n+1}=S_n=\frac{\pi}{2}$.

8. (a) Find the whole area of the curve $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

(b) The curve $r=a(1+\cos\theta)$ revolves about the initial line. Find the volume of the figure formed.

Differential Equations.

9. (a) Solve any two of the foollowing :—

(i) $(x^3y^2-y)dx-(x^2y^3+x)dy=0$;

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$.

(iii) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\cdot\log = \frac{y}{x^2}(\log y)^2$.

(b) Show that the equation $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$ is not exact. find an integating factor for this equation and hence solve the equation.

10.(a) Solve :—

$(D^3-D^2+4D-4)y=e^x\sin 2x$.

(b) Find a solution of

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3dy}{dx}+2y = e^{3x}$$

which shall vanish when $x=0$ and $x=\log_e 2$.

(c) Find the orthogonal trajectories of $y^2=4a(x+a)$.

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয়-১৯৯৫

অন্তরকলন

১। (ক) কোন বিন্দুতে একটি ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার সংজ্ঞা দাও।

$f(x)$ ফাংশনটি নিম্নরূপে বর্ণিতঃ –

$$f(x) = \begin{cases} 5x-4 \ ; \ 0<x\le 1 \\ 4x^2-3x \ ; \ 1<x<2 \end{cases}$$

$x=1$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিনা তা আলোচনা কর।

(খ) মান নির্ণয় কর ঃ–

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}-\cos\theta-\sin\theta}{(4\theta-\pi)^2}.$$

(গ) $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর (যে-কোন দুইটি)ঃ–

(i) $y = x^{\log x}+x^{\cos^{-1}x}$

(ii) $y = \frac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(iii) $y = \sin\sqrt{1+x^2}\log\cos y$

২। (ক) $=a(t-\sin t)$,

$y = a(1-\cos t)$

রেখাটির যে-কোন বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর, $(0\le t\le 2\pi)$.

(খ) $y = (x^3+2x^2+x+1)\,a^x$ হইলে y_n নির্ণয় কর।

(গ) $e^x\sin x$ কে x - এর উর্দ্ধ ক্রমানুসারে বিস্তার ক।

৩। (ক) $u= (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ হইলে প্রমাণ কর যে

$$\frac{\delta^2u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2u}{\delta y^2}+\frac{\delta^2u}{\delta z^2} = 0.$$

(খ) সমমাত্রিক ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। অয়লারের সমমাত্রিক উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।

(গ) $a_1x^2+b_1y^2=1$ এবং $a_2x^2+b_2y^2=1$ রেখারদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করার শর্ত নির্ণয় কর।

৪। (ক) কোন ফাংশনের আপেক্ষিক গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ঠ মান বলিতে কি বুঝায় তাহার সংজ্ঞা দাও। কোন ফাংশনের $f(x)$ এর আপেক্ষিক গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ঠ মান নির্ণয়ের ব্যবহারিক নিয়মগুলি সংক্ষেপে ব্যাখ্যা কর।

(খ) অসীমতট নির্ণয় কর ঃ–

$x^3-8y^3+3x^2+y^2-7x+2 = 0.$

(গ) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ রেখার (x,y) বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

যোগজকলন

৫। যে-কোন তিনটির যোগজীকরণ কর ঃ–

(i) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$;

(ii) $\int \frac{2\sin x+3\cos x}{7\sin x-2\cos x}\,dx$;

(iii) $\int \sqrt{1+\sec x}\,dx$;

(iv) $\int \tan^2x\sqrt{\sec x}\,dx$

৬। মান নির্ণয় কর (যে-কোন তিনটি ঃ –

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{x\sin x}{1+\cos^2x}\,dx$; (ii) $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$;

(iii) $\int_0^{\pi/4} \sin^4\theta d\theta$;

(iv) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\ldots+\frac{!}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$.

৭। (ক) মান নির্ণয় কর ঃ–

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^2}$$

(খ) $u_n = \int_0^{\pi/2} x^n(\sin x+\cos x)\,dx$ (যেখানে n যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যা) হইলে দেখা যে

$$u_n+n(n-1)u_{n-2}=\left(n+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}.$$

৮। (ক) $r(1+\cos\theta) =2$ রেখাটির $\theta=0$ হইতে $\theta=\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত অংশটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) $y^2=x(2a-x)$ এবং $y^2=ax$ দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

অন্তরক সমীকরণ

৯। (ক) সমাধান কর ঃ–

$(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy = 0.$

(খ) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ -এর সাধারণ সমাধানের জন্য একটি সূত্র বাহির কর, যেখানে P(x) এবং Q(x), x -এর অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

(গ) $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$ এর সমাধান বাহির কর।

১০। (ক) সাধারণ নির্ণয় কর ঃ–

$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2x = 0$, যখন $x=0$, $y=2$ এবং $\frac{dy}{dx}=0$

(খ) নিম্নের রেখাগুলির সমকোণছেদী রেখা গোত্রের সমীকরণ বাহির কর ঃ–

$y^2 = 2x^2(1-cx)$.

(গ) সমাধান কর ঃ–

$\frac{d^2y}{dx^2} - y = xe^x \sin x$.

Differential Calculus

1. (a) Define the continuity of a function at a point.
A function $f(x)$ is defined as follows:—

$$f(x) = \begin{cases} 5x-4 : 0<x\leq 1 \\ 4x^2-3x : 1<x<2 \end{cases}$$

Discuss whether the function is continuous at $x = 1$

(b) Evaluate :—

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}-\cos\theta-\sin\theta}{(4\theta-\pi)^2}$$

(c) Find $\frac{dy}{dx}$ of any two : —

(i) $y = x^{\log x} + x^{\cos^{-1}x}$

(ii) $y = \frac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(iii) $y = \sin\sqrt{1+x^2}\log\cos y$

2. (a) Find the slope of a tangent to the curve

$x = a(t-\sin t)$

$y = a(1-\cos t)$

at any point $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

(b) If $y = (x^3+2x^2+x+1)a^x$, find y_n.

(c) Expand $e^x \sin x$ in a series of ascending powers of x.

(a) If $u = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, then prove that

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = 0.$$

(b) Define homogeneous function. State and prove Euler's Theorem on Homogeneous functions.

(c) Find the condition that the curves $a_1x^2+b_1y^2=1$ and $a_1x^2+b_1y^2=1$ should cut orthogonally.

4. (a) Define what is meant by relative maximum and minimum values of a function. Explain briefly the working rule of determining the relative maxima and minima of a function $f(x)$.

(b) Find the asymptotes of $x^3-8y^3+3x^2+y^2-7x+2=0$.

(c) Find the radius of curvature of the curve $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ at any point (x,y)

Integral Calculus

5. Integrate any three of the following:—

(i) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$: (ii) $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{7\sin x - 2\cos x}dx$:

(iii) $\int \sqrt{1+\sec x}\,dx$: (iv) $\int \tan^3 x\sqrt{\sec x}\,dx$

6. Evaluate any three of the following :—

(i) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$; (ii) $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$:

(iii) $\int_0^{\pi/4} \sin^4\theta d\theta$:

(iv) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$.

7. (a) Evaluate : —

$$\int_0^{\pi}\frac{x\,dx}{(a^2\cos^2+b^2\sin^2x)^2}.$$

(b) If $u_n=\int_0^{\pi/2}x^n(\sin x+\cos x)\,dx$, then prove that

$$u_n+n(n-1)u_{n-2}=\left(n+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$

where n is a positive integer.

8. (a) Find the length of the arc of the curve $r(1+\cos\theta)=2$ from $\theta=0$ to $\theta=\frac{\pi}{2}$.

(b) find the area of the region bounded by $y^2=x(2a-x)$ and $y^2=ax$.

Differential Equations

9. (a) Solve :—

$(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$.

(b) Obtain a formula for the general solution of differential equation

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x).$$

where $P(x)$ and $Q(x)$ are continuous functions of x.

(c) Solve : —

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x}{1-x^2}\,y=x\sqrt{y}.$$

10. (a) Find the particular solution of the differential equation

$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2x=0$ when $x=0$, $y=2$ and $\frac{dy}{dx}=0$

(b) Find the orthogonal trajectories of $y^2=2x^2(1-cx)$.

(c) Solve the following :—

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=xe^x\sin x.$$

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় -১৯৯৭

অন্তরকলন

১। (ক) একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিত উপায়ে সংজ্ঞায়িত ঃ –

$f(x)=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ যখন $0<x\le a$;

$=\frac{1}{2}b^2-\frac{x^2}{6}-\frac{a^3}{3x}$ যখন $a<x\le b$.

$=\frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{x}$, $x>b$

দেখাও যে, $f(x)$ এবং $f'(x)$ অবিচ্ছিন্ন, কিন্তু $f''(x)$ বিচ্ছিন্ন।

(খ) মান নির্ণয় কর ঃ–

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2x}\right).$$

২। যে-কোন তিনটির উত্তর দাও ঃ–

(ক) যদি $y=(\cot x)^{\sin x}+(\tan x)^{\cos x}$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) মূল নিয়মে x^n-এর সাপেক্ষে $\tan\frac{1}{x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(গ) $y=\log_e\left[\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right]^{1/2}$

হইলে, দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

(খ) যদি $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

৩। (ক) যদি $f(x)=x(x-1)(x-2)$ হয়, তবে $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ব্যবধিতে $f(x)$ -এর জন্য গড় মান উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই কর।

(খ) মূল বিন্দুতে $y^2-3xy-2x^2-x^3+y^4=0$ বক্ররেখার বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

(গ) $\sin x(1+\cos x)$ এর গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মানের বিন্দুগুলি নির্ণয় কর। ইহার বৃহত্তম মানও নির্ণয় কর।

৪। (ক) যদি $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ বক্ররেখার কোন বিন্দুতে অভিলম্ব অংকিত করিলে তাহ x-অক্ষের সহিত ϕ কোণ উৎপন্ন করে তবে দেখাও যে, উহার সমীকরণ হইবে $y\cos\phi-x\sin\phi=a\cos2\phi$.

(খ) $(x+2)^2\,(x+2y+2) = x+9y+2$ বক্ররেখার অসীমতটসমূহ নির্ণয় কর।

যোগজকলন

৫। যে-কোন তিনটির যোগজীকরণ কর ঃ–

(ক) $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$; (খ) $\int \frac{dx}{13+3\cos x+4\sin x}$

(গ) $\int \frac{2x^2+x+17}{(x-1)(x^2+2x+3)}\,dx$; (ঘ) $\int \frac{\log_e \sec^{-1} x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

৬। যে-কোন তিনটি মান নির্ণয় কর ঃ –

(ক) $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin\theta)^{3/2}}{(\sin\theta)^{3/2}+(\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta$;

(খ) $\int_0^1 \log \sin\left(\frac{1}{2}\pi\theta\right) d\theta$;

(গ) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$; (ঘ) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)\,(2+\sin x)\,dx}$

৭। (ক) মান নির্ণয় কর ঃ–

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n-2^2}}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right].$$

(খ) দেখাও যে, $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-2x+2)^3} = \frac{3\pi+8}{32}$.

(গ) যদি $I_n = x^n \tan^{-1}x\,dx$ হয়, তবে দেখাও যে,

$(n+1)\,I_n + (n-1)\,I_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$.

৮। (ক) $r=a(1-\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডের পরিসীমা নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ এ্যাসট্রয়েড দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{3}{8}\pi a^2$.

অন্তরক সমীকরণ

৯। (ক) সমাধান কর (যে-কোন দুইটি) ঃ–

(i) $\frac{dy}{dx} + 1 = e^{x-y}$;

(ii) $x\frac{dy}{dx} + y = x^5y^4\cdot\cos x$;

(iii) $(x^2+y^2)\,dx + 2xy + 2xy\,dy = 0$.

(খ) সমাধান কর (যে-কোন একটি) ঃ–

(i) $(x^2+2xy-y^2)\,dx + (y^2+2xy-x^2)\,dy = 0$;

(ii) $y\,dx - x\,dy + \log x\,dx = 0$

১০। (ক) সমাধান কর (যে-কোন দুইটি) ঃ–

(i) $(D^2+4)y = \sin 2x$;

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 20y = 20x$;

(iii) $(D^2-2D+1)y = e^x$.

(খ) সমাধান কর (যে-কোন একটি)ঃ–

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x - 20\cos 2x$;

(ii) $(x+1)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x+1)\frac{dy}{dx} = (2x+3)\,(2x+4)$.

English version

Differential Calculus

1.(a) A function $f(x)$ is defined as follows :–

$f(x) = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$ for $0<x\le a$;

$= \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{x^2}{6} - \frac{a^3}{3x}$ for $a<x\le b$;

$= \frac{1}{3}\frac{(b^3-a^3)}{x}$ for $x>b$.

Prove that $f(x)$ and $f'(x)$ are continuous but $f''(x)$ is discontinuous.

(b) Evaluate $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

2. Answer (any three):–

(a) Find $\frac{dy}{dx}$ when $y = (\cot x)^{\sin x} + (\tan x)^{\cos x}$.

(b) Differntiate from 1st principle $\tan \frac{1}{x}$ *w. r. t. x.*

(c) If $y = \log_e \left[\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right]^{1/2}$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

(d) If $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$, show that $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. (a) If $f(x) = x(x-1)(x-2)$, then verify the mean value theorem for $f(x)$ on the interval $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

(b) Find the radii of curvature at the origin for the curve $y^2 - 3xy - 2x^2 - x^3 + y^4 = 0$

(c) Find the points of maxima and minima for the function sinx (1+cosx). Also find the maxmum value of the function.

4. (a) If the normal to the curve $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ makes an angle ϕ with the axis of x, show that its equation is $y\cos\phi - \sin\phi = a\cos 2\phi$.

(b) Find the asymptotes of the curve $(x+2)^2(x+2y+2) = x+9y+2$.

Integral Calculus

5. Integrate any three of the following :-

(a) $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$; (b) $\int \frac{dx}{13+3\cos x+4\sin x}$

(c) $\int \frac{2x^2+x+17}{(x-1)(x^2+2x+3)}\,dx$; (d) $\int \frac{\log_e \sec^{-1} x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

6. Evaluate any three of the following:-

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin\theta)^{3/2}}{(\sin\theta)^{3/2} + (\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta$;

(b) $\int_0^1 \log \sin\left(\frac{1}{2}\pi\theta\right) d\theta$;

(c) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$; (d) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}\,dx$.

7. (a) Evaluate:-

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n-2^2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\right].$$

(b) Show that $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-2x+2)^3} = \frac{3\pi+8}{32}$.

(c) If $I_n = \int_0^1 x^n \tan^{-1} x\,dx$, than show that $(n+1)\,I_n + (n-1)\,I_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$.

8. (a) Find the perimeter of the cardioide

$r = a(1-\cos\theta)$.

(b) Show that the area of the region bounded by the astriod $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ is $\frac{3}{8}\pi a^2$.

Differential Equations

9. (a) Solve (*any two*):-

(i) $\frac{dy}{dx} + 1 = e^{x-y}$;

(ii) $x\frac{dy}{dx} + y = x^5y^4\cdot\cos x$;

(iii) $(x^2+y^2)\,dx + 2xy + dy = 0$.

(b) Solve (*any one*):-

(i) $(x^2+2xy-y^2)\,dx + (y^2+2xy-x^2)\,dy = 0$;

(ii) $y\,dx - x\,dy + \log x\,dx = 0$

10. (a) Solve (*any two*):-

(i) $(D^2+4)y = \sin 2x$;

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 20y = 20x$;

(iii) $(D^2-2D+1)y = e^x$.

(b) Solve (any one):-

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x - 20\cos 2x$;

(ii) $(x+1)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x+1)\frac{dy}{dx} = (2x+3)(2x+4)$.

R. U(104) -1996

1. (a) Draw the graph of the function defined by

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{when } -1\le x<0\\ 1-x, & \text{when } 0\le x<1\\ 0, & \text{when } 1<x\end{cases}$$

Determine the range and domain of the function.

(b) A function $f(x)$ is defined as follows :-

$$f(x)=\begin{cases}1+\sin x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 2+(x-\frac{\pi}{2})^2, & \frac{\pi}{2}\le x<\infty\end{cases}$$

Discuss the continuity and differentiability of $f(x)$ at $x=\frac{\pi}{2}$.

2. (a) Find $\frac{dy}{dx}$ where (i) $\tan y = e^{\cos^2 x}\sin x$.

(ii) $y = e^{\tan^{-1}y}$, $\log\sec^2 x^2$

(b) Differentiate $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ with respect to $\sqrt{1-x^4}$.

3. (a) If $y^{\frac{1}{m}}+y^{-\frac{1}{m}}=2x$ prove that

$(x^2-1)\,y_{n+2}+(2x+1)\,xy_{n+1}+(x^2-m^2)\,y_n=0$

(b) state and prove Rolle's theorem. Verify with an example.

4. (a) Find the asymptotes of $x^3-2x^2y+xy^2+n^2-xy+2=0$

(b) Find the maximum or minimum value of $u=\frac{4}{x}+\frac{36}{y}$, where $x+y=2$.

(c) show that the pedal equation of the parabola $y^2=4ax$ with regard to its vertex is $a^2(r^2-p^2)=p^2(r^2+4a^2)\,(p^2+4a^2)$

5. Integrate any three of the following :-

(i) $\int\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,dx$: (i) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{2x^2-8x-1}}$:

(i) $\int\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx$: (i) $\int\frac{x+\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}\,dx$:

6. (a) If $P_n=\int\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx$; , $Q_n\int\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx$;

then show that $n\,(p_{n+1}-p_{n+1})=\sin 2nx$ and $Q_{n+1}-Q_n=P_{n+1}$

(b) Show that $\int_a^b\frac{dx}{x\sqrt{(b-x)(x-a)}}=\frac{\pi}{\sqrt{ab}}$;

বাংলা অনুবাদ

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{যখন } -1\le x<0\\ 1-x, & \text{যখন } 0\le x<1\\ 0, & \text{যখন } 1<x\end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(খ) যদি $f(x)=1+\sin x,\ 0\le x<\frac{\pi}{2}$

$=2+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2,\ \frac{\pi}{2}\le x<\infty$ হয়, তবে $x=\frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণ যোগ্যতা পরীক্ষা কর।

২। (ক) $\frac{dy}{dx}$ বাহির কর যেখানে, (i) $\tan y=e^{\cos^2 x}\sin x$ এবং

(ii) $y=e^{\tan^{-1}y}$, $\log\sec^2 x^2$

(খ) $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ কে $\sqrt{1-x^4}$ সাপেক্ষে অন্তরকলন কর।

3. (ক) যদি $y^{\frac{1}{m}}+y^{-\frac{1}{m}}=2x$ হয় তাহলে প্রমাণ কর যে,

$(x^2-1)\,y_{n+2}+(2x+1)\,xy_{n+1}+(n^2-m^2)\,y_n=0$

(ক) রোল্‌স উপপাদ্যটির বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। একটি উদাহরণ দ্বারা পরীক্ষাটি কর।

৪। (ক) $x^3-2x^2y+xy^2+x^2-xy+2=0$

রেখার অসীমতটগুলি বাহির কর।

প্রশ্ন:-২

(খ) $x+y=2$ হইলে $u=\frac{4}{x}+\frac{36}{y}$ এর গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

(গ) দেখা যে, মূল বিন্দু সাপোয়া পরাবৃত্ত $y^2=4ax$ এর পেড়াল সমীকরণ হবে

$$a^2(r^2-p^2)^2 = p^2(r^2+4a^2)\,(p^2+4a^2)$$

৫। নিম্নের যেকোন তিনটির সমীকলন কর ঃ-

(i) $\int\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,dx$; (ii) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{2x^2-8x-1}}dx$;

(iii) $\int\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx$; (iv) $\int\frac{m\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}\,dx$;

6. (a) $P_n=\int\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx$; এবং $Q_n\int\frac{\sin^2nx}{\sin^2 x}\,dx$;

হইলে দেখাও যে, $n\,(p_{n+1}-p_n) = \sin 2nx$ এবং

$Q_{n+1}-Q_n=P_{n+1}$

(খ) দেখাও যে $\int_b^a\frac{dx}{x(b-x)(x-a)}=\frac{\pi}{\sqrt{ab}}$;

R.U (104) -1995

1. (a) Find the domain and range of $f(x) = |x-1|$ and examine the continuity and differentiability of $f(x)$ at $x=1$.

(b) State and prove L'Hospital's theorem and henoe evaluate

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2x}\right]$$

2. (a) Differontiate logtan $\sqrt{x^2-1}$ with respect to $\sqrt{x-1}$

(c) If $y = e^{ax}\{a^2x^2-2nax+n(n+1)\}$ find y_n.

3. (a) Find the maximum and minimum values of $\frac{a^n}{x}+\frac{b^2}{y}$ when $x+y=a$.

(b) define an asymptote. Find the asymptotes of the curve

$$y^3-5xy^2+8x^2y-4x^3-3y^2+9xy-6x^2+2y-2x+1=0$$

4. (a) If V is a function of x and y, where $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$; then prove that

$$\frac{\delta^2V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2V}{\delta y^2}=\frac{\delta^2V}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta V}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2V}{\delta\theta^2}$$

(b) Define the angle of intersection of two curves and show that the curves $y=x^3$ and $6y=7-x^2$ intersect orthogonally.

5. Integrate any three of the following:

(i) $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$; (ii) $\int\frac{dx}{x^2-b^2\cos^2x}$, $a>b$

(iii) $\int\frac{dx}{\sin x(3+2\cos x)}$; (iv) $\int_\beta^\alpha\sqrt{(x-\alpha)\,(\beta-x)}\,dx$;

(v) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{5+4\sin x}$

6. (a) If $I_n=\int e^{ax}\cos^nx\,dx$ where $n\geq2$ is an integer, then prove that

$$I_n=\frac{1}{a^2+n^2}e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x+n\sin x)+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}I_{n-2}.$$

(b) Using (a) or otherwise, $\int_0^{\pi/2}e^x\cos^4x\,dx$.

(c) For a continuous function f on $[0,1]$, express

$$\lim_{n\to\alpha}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots.+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

as an integral and hence evaluate

$$\lim_{n\to\alpha}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots..\sqrt{n}}{n^{3/2}}$$

বাংলা অনুবাদ

(বিঃ দ্রঃ সকল প্রশ্নের মান সমান। যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও।)

১। (ক) $f(x) = |x-1|$ -এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরকলনীয়তা পরীক্ষা কর।

(খ) ল'পিটালের উপপাদ্যটি বিবৃত কর ও প্রমান দাও এবং অতঃপর

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]$ এর মান নির্ণয় কর।

২। (ক) $y=\frac{\tan x}{\log x+x^{1/2}}$ এর $\frac{dy}{dx}$ বাহির কর।

(খ) $\sqrt{x-1}$ এর প্রেক্ষিতে $\log\tan\sqrt{x^2-1}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(গ) $y=e^{ax}\{a^2x^2-2nax+n(n+1)\}$ হইলে y_n নির্ণয় কর।

৩। (ক) $x+y=a$ হইলে $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}$ এর গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

(খ) অসীম তটের সংজ্ঞা দাও

$$y^3-5xy^2+8x^2y-4x^3-3y^2+9xy-6x^2+2y-2x+1=0$$

এর অসমীমতটগুলি বাহির কর।

৪। (ক) যদি V,x,y এর ফাংশন হয়, যেখানে $x=r\cos\theta$

এবং $y=r\sin\theta$; তাহলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\delta^2V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2V}{\delta y^2}=\frac{\delta^2V}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta V}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2V}{\delta\theta^2}$$

(খ) দুইটি বক্ররেখার ছেদন-কোণের সংজ্ঞা দাও এবং দেখাও যে $y=x^3$

ও $6y=7-x^2$ বক্ররেখাদ্বয় লম্বীয়ভাবে ছেদ করে।

5. নিম্নের যে কোন তিনটির উত্তর দাও ঃ

(i) $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-r^2}}$; (ii) $\int\frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x}$, $a>b$

(iii) $\int\frac{dx}{\sin x(3+2\cos x)}$; (iv) $\int_\alpha^\beta\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\,dx$;

(v) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{5+4\sin x}$

৬। (ক) যদি $I_n=\int e^{ax}\cos^n x\,dx$ হয়, যেখানে $n\geq 2$ পুর্ণসংখ্যা, তবে প্রমান কর যে

$I_n=\frac{1}{a^2+n^2}e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x+n\sin x)+\frac{n(-1)}{a^2+n^2}I_{n-2}$.

(খ) উপরের (ক) ব্যবহার করিয়া অথবা অন্যভাবে $\int_0^{\pi/2}e^x\cos^4 x\,dx$.

এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $[0,1]$, ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন f- এর জন্য

$$\lim_{n\to\alpha}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

কে যোগজরূপে প্রকাশ কর এবং তাহার সাহায্যে

$$\lim_{n\to\alpha}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots.\sqrt{n}}{n^{3/2}}$$

এর মান নির্ণয় কর।

R.H. (201)-1995

1. (a) Regarding $f(x+ht, y+kt)$ as a functsion of t, expand the function in a series of ascending powers of t, and deduce a proof of taylor's theorem for two independent variables.

(b) Use Maclaurin's Theorem to obtain the expansion of e^{xy}.

2. (a) If $z=\left(x\frac{\delta}{\delta x}-1\right)\{f(y+x)-\phi(y-x)\}$

prove that $x\left(\frac{\delta^2z}{\delta x^2}-\frac{\delta^2z}{\delta y^2}\right)=z\frac{\delta z}{zx}$

(b) If $xyz=a^2(x+y-z)$, prove that the minimum value of $yz+zx+xy$ is $9a^2$.

3. (a) Show that the circle of curvature at the origin for the curve

$x+y=ax^2+by^2+cx^2$ is $(a+b)(x^2+y^2)=2x+2y$

(b) Trace the ourve $r^2=a^2\cos 2\theta$.

4. (a) Evaluate

(i) $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\,dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \tan^n\theta, -1<n<1$

(b) Find the value of $\Gamma\frac{1}{n}\ \Gamma\frac{2}{n}\ \Gamma\frac{3}{n}\ \ldots\ \Gamma\frac{n-1}{n}$

5. (a) Evaluate $\iint e^{\frac{y}{x+y}}\,dxdy$, taken over the triangle $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

(b) Evaluate $\int\int\int_R (x+y+z+1)^2\,dxdydz$ where R is the region defined by $x\geq 0$, $y\geq 0$ $z\geq 0$, $x+y+z\leq 1$.

(c) prove that $\int_0^1 \frac{x^a-x^{-a}}{1-x}\,dx = \pi \cot a\pi - \frac{1}{a}$

6. (a) $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(ax)-\tan^{-1}(bx)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{a}{b}$

(b) Find the volume cut from the sphere $x^2+y^2+z^2=a^2$ by the cylinder $x^2+y^2=ax$

(c) Find the area of the surface of the cone $z^2=3(x^2+y^2)$ cut out by the paraboloid $z=x^2+y^2$.

বাংলা অনুবাদ

১। (ক) $f(x+ht,\ y+kt)$ কে t এর ফাংশন বিবেচনা করিয়া, t এর উর্দ্ধক্রম শক্তি আকারে সিরিজে বিস্তার কর এবং ইহা হইতে স্বাধীন দুই চলকের টেলর উপপাদ্য প্রমাণ কর।

(খ) ম্যাক্লোরিন উপপাদ্য ব্যবহার করিয়া e^{xy} এ বিস্তার কর।

২। (ক) যদি $z=\left(x\frac{\delta}{\delta x}-1\right)\{f(y+x)-\theta(y-x)\}$

প্রমাণ কর যে $x\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{\delta^2z}{\delta y^2}\right)=2\frac{\delta z}{\delta x}$

(খ) যদি $xyz=a^2(x+y+z)$ হয়, প্রমাণ কর যে $yz+zx+xy$ এর লঘিষ্ঠ মান $9a^2$ হবে।

৩। (ক) $x+y=ax^2+by^2+cx^2$ কার্ভ এর মূল বিন্দুতে বৃত্ত বক্রতা $(a+b)(x^2+y^2)=2x+2y$ হইবে দেখাও।

(খ) $r^2=a^2\cos^2\theta$ এর লেখ চিত্র অংকন কর।

৪। (ক) মান নির্ণয় কর। (i) $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\,dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2}\tan^n\theta d\theta$, $-1<x<1$.

(খ) $\Gamma\frac{1}{n}\ \Gamma\frac{2}{n}\ \Gamma\frac{3}{n}\ \ldots\ \Gamma\frac{n-1}{n}$ এর মান নির্ণয় কর।

৫। (ক) $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ ত্রিভুজ এর উপর $\iint e^{\frac{y}{x+y}}\,dxdy$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y+z\leq 1$ অঞ্চলে

$\iiint (x+y+z+1)^2\,dxdy\,dz$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) প্রমাণ কর যে $\int_0^1 \frac{x^a-x^{-a}}{1-x}\,dx = \pi\cot a\pi - \frac{1}{a}$

৬। (ক) $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(ax)-\tan^{-1}(bx)}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\log\frac{a}{b}$

(খ) $x^2+y^2=ax$ সিলিন্ডার দ্বারা $x^2+y^2+z^2=a^2$ গোলকের ছেদাংকের আয়তন নির্ণয় কর।

(গ) কোনক $z^2=3(x^2+y^2)$ এর যে অংশ অধিবৃত্তক $z=x^2+y^2$ এর দ্বারা কর্তিত পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

1. (a) If $f(x,y,z)$ admits a continuous partial derivatives and satisfies the relation

$$x\frac{\delta f}{\delta x}+y\frac{\delta f}{\delta y}+z\frac{\delta f}{\delta z}=nf(x,y,z),$$

where n is a positive integer, prove that $f(x,y,z)$ is a homogeneous function of degree n.

(b) If $F(V^2-x^2,\ V^2-y^2,\ V^2-z^2)=0$

where V is a function of x, y.z, show that

$$\frac{1}{x}\frac{\delta V}{\delta x}+\frac{1}{y}\frac{\delta V}{\delta y}+\frac{1}{z}\frac{\delta V}{\delta z}=\frac{1}{V}$$

2. (a) Prove that the maximum and the minimum radii vectors of the surface

$$(x^2+y^2+z^2)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

by the plane $lx+my+nz=0$ are given by

$$\frac{a^2l^2}{1-a^2r^2}+\frac{b^2m^2}{1-b^2r^2}+\frac{c^2n^2}{1-c^2r^2}=0$$

(b) Prove that the centre of curvature at the point

$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ on the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ is

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta, \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3\theta\right).$$

3. (a) Define the point of inflexion, node and cusp. Examine the nature of the origin of the curve $y^2=2x^2+x^4y-2x^4$.

(b) Trace the curve

$$y^2(x^2+y^2)+16x^2-4x(x^2+2y^2)=0$$

4. (a) Examine the convergence of the improper integral $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin x}$

(b) Show that $\int_0^{\infty} e^{-x}x^n=n!$,
n being a positive integer.

5. (a) prove that $B(l,m)=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}$

Hence show that $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

(b) Find the value of $\int_0^{\infty}\frac{\log(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2}dx$

6. (a) Find the volume cut from the sphere $x^2+y^2+z^2=a^2$ by the cylinder $x^2+y^2=ax$.

(b) Show that area botween the parabola $y^2=4x$ and the atraight line $y=2x-4$ is 9.

(c) Change the order of integration in $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}dxdy$ and hence find its value.

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয়-১৯৯৮
গণিত
প্রথম পত্র

১। (ক) পূর্ণসংখ্যা সেটে "কনগ্রুয়েন্স মড্যুলো m" সংজ্ঞায়িত কর। দেখাও যে, যদি $a\equiv b \pmod m$ এবং $c\equiv d \pmod n$ হয়, তবে $na-mc\equiv nb-md \pmod{mn}$ হয়।

(খ) দেকার্তেজের চিহ্নের নিয়ম উদাহরণসহ বর্ণনা কর।

(গ) জটিল সংখ্যাকে জ্যামিতিক স্থানাঙ্কের নিয়মে প্রকাশ করে ইহার আরগুমেন্ট ও এম্প্লিসিউড বের কর।

(ঘ) দ্বিমাত্রিকে একটি দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণ দ্বারা একটি প্যারাবোলা প্রকাশ করার শর্তগুলো নির্ণয় কর।

(ঙ) ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিতে একটি সরল রেখার সমীকরণ বের কর, যখন সরল রেখাটি নির্দিষ্ট একটি বিন্দু দিয়ে গমন করে এবং সরল রেখাটির নির্দিষ্ট দিক কোসাইন দেওয়া আছে।

ক বিভাগ

২।(ক) p একটি মৌলিক সংখ্যা হ'লে দেখাও যে, $\lfloor p-1 \rfloor + 1 \equiv 0 \pmod p$.

(খ) দেখাও যে $\lfloor 28 \rfloor + 233$ সংখ্যাটি 899 দ্বারা বিভাজ্য।

(গ) সমাধান কর ঃ $78x\equiv 26 \pmod{143}$.

৩। (ক) যদি $p>1$ এবং a, b দু'টি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $a>b$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{p^a-1}{a}-\frac{p^b-1}{b} > \frac{1}{2}(a-b)(p-1)^2$

(খ) যদি $x^3+5x^2+7x+9=0$ সমীকরণের মূলগুলো a, b, c হয়, তবে $(b+c-3a)(c+a-3b)(a+b-3c)$-এর মান বের কর।

৪। (ক) যদি a, b, c যে- কোন বাস্তব সংখ্যা হয় তবে দেখাও যে,
$(b-c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2>(bc+ca+ab)$.

(খ) দেখাও যে, $\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^m=\cos\left(\frac{m\pi}{2}-m\theta\right)+i\sin\left(\frac{m\pi}{2}-m\theta\right)$.

৫। (ক) যদি $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হয়, তবে $\alpha^2+\beta^2, \beta^2+\gamma^2, \gamma^2+\alpha^2$ মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণটি বের কর।

(খ) $(3+4i)^{(\alpha+i\beta)}$ কে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশে বিশ্লেষণ কর।

৬। যে-কোন দুইটি ধারার সমষ্টি নির্ণয় কর ঃ –

(i) $\frac{3}{2.4}+\frac{3.4}{2.4.6}+\frac{3.4.5}{2.4.6.8}+$ ..... অসীম পদ পর্যন্ত;

(ii) $\tan\frac{1}{2}\theta\sec\theta+\tan\frac{1}{2^2}\theta\sec\frac{1}{2}\theta+\tan\frac{1}{2^3}\theta\sec\frac{1}{2^2}\theta+$ ..... অসীম পর্যন্ত;

(iii) $\cos^2\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\cos3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\cos5\theta-$.....n পদ পর্যন্ত।

খ বিভাগ

৭। (ক) $ax^2+2hxy+by^2+4gx+4fy+c=0$ সমীকরণটি এক জোড়া সরল রেখা নির্দেশ করলে তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলো বের কর। সরল রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব ও সমান্তরাল হওয়ার শর্তগুলো নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, মূল বিন্দুর সাথে সরল রেখা $ax+by=2ab$ ও বক্ররেখা $(x-b)+(y-a)^2=c^2$ এর ছেদ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী সরল রেখা দুইটি পরস্পরের সাথে লম্ব হবে যদি $a^2 + b^2 = c^2$ হয়।

৮।(ক) দেখাও যে, $9x^2+24xy+16y^2-2x+14y+1=0$ সমীকরণটি একটি প্যারাবোলা নির্দেশ করে। এই প্যারাবোলার শীর্ষ বিন্দু ও নাভির স্থানাঙ্ক এবং অক্ষরেখা ও শীর্ষ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) (0, 2) ও (0,-2) বিন্দুদ্বয়গামী দুইটি বৃত্ত $y = mx+c$ সরল রেখাকে স্পর্শ করে। প্রমাণ কর যে, যদি উহারা সমকোণে ছেদ করে, তবে $c^2=4(m^2+2)$.

৯।(ক) প্রমাণ কর যে, সরল রেখার দিক কোসাইন $pl+qm+rn =0$ এবং $alm+bmn+cnl=0$ সম্বন্ধযুক্ত হ'লে উহারা পরস্পর লম্ব হবে,

যদি $\frac{b}{p}+\frac{c}{q}+\frac{a}{r}=0$ হয়।

(খ) (a, b, c) বিন্দুগামী এবং $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ ও $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$ এর সমান্তরাল সমতলের সমীকরণ নির্ণয় কর।

১০।(ক) $\frac{x-3}{3}=\frac{y-5}{5}=\frac{z-7}{7}$ এবং $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-6}{6}$ দ্বারা নির্দেশিত সরল রেখা দুটোর ক্ষুদ্রতম দূরত্বের দৈর্ঘ্য এবং এর সমীকরণ বের কর।

(খ) গোলকের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা বৃত্ত $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 3y + 6 = 0$, $x -2y + 4z -7 = 0$ দিয়ে এবং গোলক $x^2 + y^2-z^2-2x+4y-6z+5=0$ এর কেন্দ্র দিয়ে যায়।

১১।(ক) যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটির এক জোড়া অনুবন্ধী অর্ধব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের উৎকেন্দ্রিক কোণ ϕ এবং ϕ' হয়, তবে প্রমাণ করে যে, $\phi' -\phi = \pm\frac{\pi}{2}$.

(খ) $ax+by+cz=1$ সমতলটি $x^2-2y^2=3z$ প্যারাবোলয়েডটিতে স্পর্শ সমতল হওয়ার শর্ত বের কর।

(English Version)

1. (a) Define "Congruence modulo m" on the set of integers. Show that if $a \equiv b \pmod m$ and $c \equiv d \pmod n$, then $na-mc \equiv nb-md \pmod{mn}$.

(b) State descarte's rule of signs with examples.

(c) Expressing a complex number in co-ordinate system of geometry, find its argument and amplitude.

(d) Find the conditions that a second degree general equation in two dimensions shall represent a parabola.

(e) Find the equation of a straight line in three dimensional geometry, when it passes through a fixed point and it has fixed direction cosines.

Group —A

2. (a) If p is a prime number, then show that, $\left|p-1\right. +1\equiv 0 \pmod p$.

(b) Show that the number $\left|28\right. + 233$ is divisible by 899.

(c) Solve : $78x\equiv 26 \pmod{143}$.

3. (a) If $p>1$ and a, b are positive integers with $a>b$, then show that $\frac{p^a-1}{a}-\frac{p^b-1}{b}>\frac{1}{2}(a-b)(p-1)^2$

(b) If a, b, c are the roots of the equation $x^3+5x^2+7x+9=0$ then find the value of $(b+c-3a)(c+a-3b)(a+b-3c)$

4. (a) If a, b, c are any real numbers, show that $(b+c-a)^2+(c+a-b)^2 + (a+b-c)^2>(bc+ca+ab)$.

(b) Show that—$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^m = \cos\left(\frac{m\pi}{2}-m\theta\right) + i\sin\left(\frac{m\pi}{2}-m\theta\right)$.

5. (a) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3+px^2+qx+r=0$, form the equations whose roots are $\alpha^2 + \beta^2$, $\beta^2+\gamma^2$, $\gamma^2+\alpha^2$

(b) Separate $(3+4i)^{\alpha+i\beta}$ into real and imaginary parts.

6. Find the sum of any two of the following series :—

(i) $\frac{3}{2.4}+\frac{3.4}{2.4.6}+\frac{3.4.5}{2.4.6.8}+$.....up to infinity;

(ii) $\tan\frac{1}{2}\theta\sec\theta + \tan\frac{1}{2^2}\theta\sec\frac{1}{2}\theta + \tan\frac{1}{2^3}\theta\sec\frac{1}{2^2}\theta+$..... up to infinity;

(iii) $\cos^2\theta -\frac{1}{3}\cos^3\theta\cos3\theta + \frac{1}{5}\cos^5\theta\cos5\theta-$.....up to n-terms.

Group-B

7. (a) If the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 4gx + 4fy + c = 0$ respresents a pair of straight lines, then find the angles between them. Find the conditions for which these lines shall be perpendicular to each other and also parallel to each other.

(b) Prove that two straight lines joining the origin to the two points of intersection of the straight line $ax+by=2ab$ with the curve $(x-b)^2+(y-a)^2= c^2$ will be perpendicular to each other if $a^2 + b^2 = c^2$.

8. (a) Show that $9x^2+24xy+16y^2-2x+14y+1=0$ represents a parabola. Find the co-ordinates of the vertex, focus and the equations of the axis and the tangent at the vertex of this parabola.

(b) Prove that, if the two circles, which pass through the points (0, 2) and (0,-2) and touch the line $y = mx+c$, cut orthogonally, then $c^2=4(m^2+2)$.

9. (a) Prove that straight lines whose direction cosines are connected by the relation $pl+qm+rn =0$ and $alm+bmn+cnl=0$ are perpendicular if $\frac{b}{p}+\frac{c}{q}+\frac{a}{r}=0$.

(b) Find the equation of the plane through the point (a, b, c) and parallel to the lines $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ ও $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$.

10. (a) Find the shortest distance and the equation of the line of the shortest distance between the lines whose equations are $\frac{x-3}{3}=\frac{y-5}{5}=\frac{z-7}{7}$ and $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-6}{6}$.

(b) find the equation of the sphere through the circle $x^2+y^2+z^2+2x+3y+6=0$, $x-2y+4z-7=0$ and the centre of the sphere $x^2+y^2-z^2-2x+4y-6z+5=0$.

11.(a) If ϕ and ϕ' are eccentric angles of the end points of a pair of conjugate semi-diameters of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

then prove that $\phi'-\phi=\pm\frac{\pi}{2}$.

(b) Find the condition that the plane $ax+by+cz=1$ may be tangent plane to the paraboloid $x^2-2y^2=3z$.

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয়-১৯৯৮
গণিত
দ্বিতীয় পত্র
ক বিভাগ- অন্তরকলন

১।(ক) কোন বিন্দুতে একটি ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার সংজ্ঞা দাও। $f(x)$ ফাংশনটি নিম্নরূপে বর্ণিত ঃ–

$$f(x)=\begin{cases}5x-4; & 0<x\le 1\\ 4x^2-3x; & 1<x<2.\end{cases}$$

$x=1$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিনা তা নির্ণয় কর।

(খ) আদি সূত্রের সাহায্যে x-এর সাপেক্ষে $\sin^2x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

২।(ক) $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর (যে-কোন দুইটি) ঃ –

(i) $y=x^{\log x}+x^{\sin^{-1}x}$; (ii) $x^py^q=(x+y)^{p+q}$;
(iii) $x=a(\theta+\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$.

(খ) লিবনিজ-এর উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

৩।(ক) যদি $u=\sin^{-1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=0$.

(খ) $y(x^2-y^2)=y(x-y)+2$ বক্ররেখার অসীমতটগুলি নির্ণয় কর।

৪।(ক) প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত বৃত্তের মধ্যে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রগুলির মধ্যে বর্গই বৃহত্তম।

(খ) $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{4}\right)$ বিন্দুতে $y(x^2+a^2)=ax^2$ রেখাটির স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ বিভাগ–যোগজকলন

৫। যে-কোন তিনটির যোগজীকরণ কর ঃ–

(ক) $\int\frac{\cos x\,dx}{5-3\cos x}$; (খ) $\int\frac{\sec x\,dx}{a+b\tan x}$;

(গ) $\int\frac{3x+2}{5x^2+2x+3}dx$; (ঘ) $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2dx$.

৬। যে-কোন তিনটির মান নির্ণয় কর ঃ

(ক) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}$; (খ) $\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin\theta)^{3/2}d\theta}{(\sin\theta)^{3/2}+(\cos\theta)^{3/2}}$;

(গ) $\int_{-2}^{2}x^3(1-x^2)^7dx$; (ঘ) $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$; [a, b>0].

৭।(ক) মান নির্ণয় কর ঃ– $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots\ldots+\frac{n}{2n^2}\right]$

(খ) দেখাও যে, $\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta=\frac{\pi}{8}\log2$.

(গ) যদি $I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n\theta d\theta$ হয়, তবে দেখাও যে, $I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$ অতপর $\int_0^{\pi/4}\tan^6x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

৮।(ক) দেখাও যে, $y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $16a^2/3$.

(খ) $r(1+\cos\theta)=2$ রেখাটির $\theta=0$ হইতে $\theta=\pi/2$ পর্যন্ত অংশটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ বিভাগ –অন্তরক সমীকরণ

৯।(ক) সমাধান কর ঃ

(i) $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$; (ii) $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=xy$;

(iii) $(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$

(খ) সমাধান কর ঃ

(i) $(D^2+4)y=\sin 3x$; (ii) $(D^2+5D+4)y=0$.

১০।(ক) নিম্নের রেখাগুলির সমকোণছেদী রেখা গোত্রের সমীকরণ বাহির কর ঃ

$y^2=2x^2(1-cx)$.

(খ) সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর ঃ– $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2x=0$, যখন $x=0$, $y=2$ এবং $\frac{dy}{dx}=0$

(গ) সমাধান কর ঃ $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=e^x\cos x$.

[English Version]
Group A—Differential Calculus

1. (a) Define the continuity of a function at a point. A function $f(x)$ is defined as follows :—

$$f(x)=\begin{cases}5x-4; & 0<x\le 1\\ 4x^2-3x; & 1<x<2.\end{cases}$$

Find whether the function is continuous at $x=1$ or not.

(b) Differntiate $\sin^2x$ With respect to x from first principle.

2. (a) Find $\frac{dy}{dx}$ of any two of the following :—

(i) $y=x^{\log x}+x^{\sin^{-1}x}$; (ii) $x^py^q=(x+y)^{p+q}$;
(iii) $x=a(\theta+\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$.

(b) State and prove Leibnitz's theorem.

3. (a) If $u=\sin^{-1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, then show that $x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=0$.

(b) Find the asymptotes of the curve $y(x^2-y^2)=y(x-y)+2$.

4. (a) Show that the maximum rectangle inscribed in a circle is a square.

(b) Find the equations of the tangents to the curve $y(x^2+a^2)=ax^2$ at the points. $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{4}\right)$.

GROUP B— INTEGRAL CALCULUS

5. Integrate any three of the following :—

(a) $\int \frac{\cos x\,dx}{5-3\cos x}$;

(b) $\int \frac{\sec x\,dx}{a+b\tan x}$;

(c) $\int \frac{3x+2}{5x^2+2x+3}dx$;

(d) $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$.

6. Evaluate any three to following :—

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}$;

(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin\theta)^{3/2}d\theta}{(x\sin\theta)^{3/2}+(\cos\theta)^{3/2}}$;

(c) $\int_{-2}^{2} x^9(1-x^2)^7dx$;

(d) $\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$; [a, b>0].

7. (a) Evaluate :— $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{n}{2n^2}\right]$

(b) Show that $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)d\theta=\frac{\pi}{8}\log 2$.

(c) If $I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n\theta d\theta$. then show that $I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$. Hence find the value of $\int_0^{\pi/2}\tan^6x\,dx$.

8. (a) Show that the area enclosed by the curves $y^2=4ax$ and $x^2=4ay$ is $16a^2/3$.

(b) Find the length of the arc of the curve $r(1+\cos\theta)=2$ from $\theta=0$ to $\theta=\pi/2$.

Group C—Differential Equations

9. (a) Solve :—

(i) $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$; (ii) $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=xy$;

(iii) $(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$

(b) Solve :—(i) $(D^2+4)y=\sin 3x$; (ii) $(D^2+5D+4)y=0$.

10.(a) Find the orthogonal trajectories of $y^2=2x^2(1-cx)$.

(b) Find the general solution:—

$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2x=0$, when $x=0, y=2$ and $\frac{dy}{dx}=0$

(c) Solve:— $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=e^x\cos x$.

জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয়—১৯৯৮

তৃতীয় পত্র

গাণিতিক পদ্ধতি ও যোগাশ্রয়ী বীজগণিত

১। যে কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ–

(ক) পর্যায়ী, যুগ্ম ও অযুগ্ম ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, $\sin x$ একটি পর্যায়ী ফাংশন। ইহার পর্যায়কাল কত?

(খ) কোন রৈখিক অন্তরক সমীকরণকে ধারায় সমাধানের ফ্রবিনিয়াস-এর পদ্ধতি বর্ণনা কর।

(গ) যদি একটি সার্বিক সেট U এর উপসেট A, B, C হয়, তবে ভেন-চিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত সূত্রগুলোর সত্যতা যাচাই কর ঃ

(i) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(ii) $(A\cup B)'=A'\cap B'$. যেখানে "′" সেটের পুরক নির্দেশ করে।

(ঘ) $v_1, v_2, u_3, \ldots\ldots\ldots\ldots$ vk. ভেক্টরসমূহের যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীলতা ও অনির্ভরশীলতার সংজ্ঞা দাও R^3 এ $u=(1, 1, -1)$. $v=(1, 0, 2)$ এবং $w=(1, 1, 1)$ ভেক্টরগুলোর যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীলতা বা অনির্ভরশীলতা যাচাই কর।

(ঙ) দুইটি ভেক্টরের ডট ও ক্রশ গুণনের সংজ্ঞা দাও। $3i+2j-6k$ এবং $4i-3j+k$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

ক বিভাগ–গাণিতিক পদ্ধতি

২।(ক) ফুরিয়ার ধারার সংজ্ঞা দাও এবং দেখাও যে, যুগ্ম ফাংশনের ফুরিয়ার ধারায় কোন সাইন পদ থাকে না।

(খ) $f(x)$ ফাংশনটিকে ফুরিয়ার ধারায় প্রকাশ কর যেখানে

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x\le 0\\ 1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

অতঃপর দেখাও যে, $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{\pi}{4}$

৩।(ক) লেজেন্ডার বহুপদী $P_n(x)$ এর রড্রিগ্স এর সূত্র হতে $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ বের কর এবং $2x^3+x^2-5x-4$ কে লেজেন্ডার বহুপদীগুলোর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\int_{-1}^{1}[P_n(t)]^2dt=\frac{2}{2n+1}$

৪।(ক) প্রথম প্রকারের বেসেল ফাংশন $J_n(x)$ এর সংজ্ঞা দাও এবং প্রমাণ কর যে,

$$\frac{d}{dx}\{x^nJ_n(ax)\}=ax^nJ_{n-1}(ax).$$

(খ) প্রমাণ কর ঃ $e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}J_n(x)t^n$, $n\ge 0$. অতঃপর দেখাও যে,

$$x\{J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)\}=2nJ_n(x).$$

৫।(ক) বটা ফাংশন $\beta(m, n)$ এর সংজ্ঞা দাও এবং প্রমাণ কর যে,

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}}dt=\beta(m, n).$$ আরও দেখাও যে, $\int_0^1 t^6\sqrt{(1-t^2)}\,dt=\frac{5\pi}{256}$

(খ) সমতলে গ্রীণ এর উপপাদ্যটি বর্ণনা কর এবং $\int_C(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$ এর জন্য ইহার সত্যতা যাচাই কর, যেখানে c হল $y=x^2$ এবং $y^2=x$ দ্বারা আবদ্ধ এলাকা।

English Version

1. (a) Define periodic, even and odd functions. Show that sin x is a periodic function. What is its period?

(b) Describe the method of Frobenious to find the solution in series of a linear differential equation.

(c) If A, B, C are subsets of a universal set U, then verify the following formulae by using Venn diagrams:—

(i) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(ii) $(A\cup B)' = A'\cap B'$, where "′" denotes the complement of a set.

(d) define linear dependence and independence of the vectors $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots\ldots, vk$. Test the linear dependence or independence of the vectors $u=(1, 1, -1)$, $v = (1, 0, 2)$ and $w= (1, 1, 1)$ in R^3

(e) Define the dot and cross product of two vectors. Find the angle between the vetors $3i+2j-6k$ and $4i-3j+k$.

Group A—Mathematical Methods

2. (a) Define a Fourier series and show that an even function can have no sine terms in its Fourier expansion.

(b) Expand $f(x)$ Fourier series, where

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x\le 0\\ 1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Hence show that $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\ldots\ldots\ldots\infty=\frac{\pi}{4}$

3. (a) Find $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ from Rodrigue's formula for Legendre polynomials $P_n(x)$ and express $2x^3+x^2-5x-4$ in terms of the Legendre polynomials.

(b) Prove that $\int_{-1}^{1}[P_n(t)]^2dt=\frac{2}{2n+1}$

4. (a) Define Bessel function $J_n(x)$ of the first kind and prove that

$$\frac{d}{dx}\{x^nJ_n(ax)\}=ax^nJ_{n-1}(ax).$$

(b) Prove : $e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}J_n(x)t^n$, $n\ge 0$.

Hence show that $x\{J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)\} = 2nJ_n(x)$.

5. (a) Define Beta function $\beta(m, n)$ and prove that

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}}dt=\beta(m, n).$$ Also show that

$$\int_0^1 t^6\sqrt{(1-t^2)}\,dt=\frac{5\pi}{256}$$

(b) State Green's theorem in the plane and verify it for $\oint_c (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$ where c is the closed curve of the region bounded by $y = x^2$ and $y^2 =x$